ユークリッド内積 (by 山田)

$\mathbf{R}^n$ において, 成分を $\mathbf{u} = {}^t(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $\mathbf{v} = {}^t(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ と表わすとき,
次の関数をユークリッド内積（標準的内積, p.118）という.

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle: & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}, \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \quad (= {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{v}). \end{array} \qquad (ユ)$$

この 内積 は次の３大性質をみたす：

双線形： $\langle c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle = c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}\rangle + c_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle$,
$\langle \mathbf{u}, d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2\rangle = d_1\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle + d_2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle$.

対称性： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$.

非負性： $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geqq 0$. さらに $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

ノルム（長さ） $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$ ノルム は次を満たす

・任意の $\mathbf{u}$ に対して $\|\mathbf{u}\| \geqq 0$. しかも $= 0$ となるのは $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のときに限る.

・ $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$.

シュワルツの不等式 (p.118) ：次の不等式が成り立つ.

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|,$$

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leqq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2).$$

証明（３大性質を使って証明できる）

$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のとき, 左辺 $=$ 右辺 $= 0$ という意味で式が成り立つ. 以下 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ とする.

実数 t に対し $t\mathbf{u} - \mathbf{v}$ について考える.

非負性から

$$\begin{array}{rcll} 0 \leq \|t\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 & = & \langle t\mathbf{u} - \mathbf{v}, t\mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle & \text{ノルムの定義} \\ & = & t^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - t\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle & \text{双線形性} \\ & = & t^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle & \text{対称性} \\ & = & \|\mathbf{u}\|^2t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + \|\mathbf{v}\|^2 & \text{ノルムの定義} \end{array}$$

t の２次式が得られた. t^2 の係数（$\|\mathbf{u}\|^2$）が正なのでグラフは 下に凸の放物線.
この２次式が 常に 0 以上 であるための条件は “判別式 ≤ 0”. 計算すると,

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 & \leq & 0 \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 & \leq & \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \\ |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| & \leq & \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \end{array}$$

最後の式変形では 両辺のルートをとった. (証明終)

補足. t の２次式が最小となる t を t_0 とおくと, $\mathbf{u} \perp (t_0\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ $(\neq \mathbf{0})$ に対して, 次を満たす θ を「$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のなす角」という：$\cos\theta = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$.

外積（ベクトル積）（by 山田）

３次元空間に特有の計算

1 定義　$\mathbf{R}^3$ の２つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，次のベクトルを

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積（ベクトル積）とよび $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

覚え方

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots(3) \\ \cdots(1) \\ \cdots\cdots(2) \end{array}$$

例：$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$.

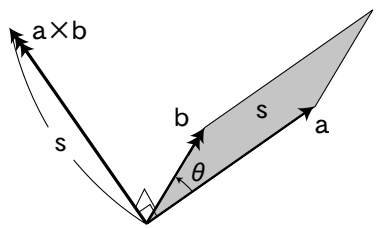
2 幾何的性質

(1)　$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の**方向**は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に直交する.

(2)　$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の**長さ**は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とで定まる 平行四辺形の面積である.

(3)　$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の**向き**は，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ がこの順に 右手系.

この３つの性質で $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は特徴つけられる.



3 公式

(1) [線形性]
$$\begin{aligned} (c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} &= c_1(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + c_2(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}). \\ \mathbf{a} \times (d_1\mathbf{b}_1 + d_2\mathbf{b}_2) &= d_1(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1) + d_2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

(2) [交代性]　$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.　特に，$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(3) [ラグランジュの公式]　$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \quad = \quad \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \quad = \quad (\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \sin\theta)^2.$$

(4) [結合法則をみたさない]　一般に　$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

例：$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 一方 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.