積分の変数変換

補題１ D は R^2 の面積をもつ集合，$f: R^2 \to R^2$ は線形写像でその行列を A とする．このとき $f(D)$ は面積をもつ集合でその面積はつぎのように与えられる：

$$\mu(f(D)) = |\det A|\mu(D). \tag{1.1}$$

証明 $\det A = 0$ のときは $f(D)$ は原点を通るある直線上の有限部分に含まれる．したがって $\mu(f(D)) = 0$ であるから，この場合 (1.1) がなりたつ．

$\det A \neq 0$ とする．まず A が基本行列，すなわち次の３種類のいずれかであるとする．

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ただし $\alpha \neq 0$. 初めに $D = K = [a, b] \times [c, d]$ の場合を考える．たとえば A が (i) の第１の行列のときは，$\alpha > 0$ ならば $f(K) = [\alpha a, \alpha b] \times [c, d]$ であり，$\alpha < 0$ ならば $f(K) = [\alpha b, \alpha a] \times [c, d]$ である．いずれの場合にも $\mu(f(K)) = |\alpha|(b-a)(d-c) = |\det A|\mu(D)$. A が他の基本行列の場合も (1.1) を容易に確かめることができる．

つぎに矩形 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ により $D = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ である場合，すなわち D が矩形塊である場合をかんがえる．まず各矩形がたがいに交わるとしても辺において交わる場合は

$$\mu(g(D)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(g(K_i)) = \sum_{i=1}^{n} |\det A|\mu(K_i) = |\det A| \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) = |\det A|\mu(D).$$

また矩形の内部が交わる場合には，矩形を細かく分割すれば高々辺において交わるように取り直すことができる．したがってこの場合にも (1.1) がなりたつ．

D が一般の面積をもつ集合とする．矩形塊 E, F を $E \subset D \subset F$ であるようにとる．このとき $f(E) \subset f(D) \subset f(F)$ であるから

$$\mu_*(f(E)) \leq \mu_*(f(D)) \leq \mu^*(f(D)) \leq \mu^*(f(F)).$$

$f(E), f(F)$ については既に示したように

$$\mu_*(f(E)) = \mu(f(E)) = |\det A|\mu(E) \qquad \mu^*(f(F)) = \mu(f(F)) = |\det A|\mu(F)$$

であるから，

$$|\det A|\mu(E) \leq \mu_*(f(D)) \leq \mu^*(f(D)) \leq |\det A|\mu(F).$$

したがって

$$\mu(E) \leq \frac{\mu_*(f(D))}{|\det A|} \leq \frac{\mu^*(f(D))}{|\det A|} \leq \mu(F).$$

$E \subset D$ であるすべての矩形塊 E に関する $\mu(E)$ の上限が $\mu_*(D)$, $D \subset F$ であるすべての矩形塊 F に関する $\mu(F)$ の下限が $\mu^*(D)$ であるから，

$$\mu_*(D) \leq \frac{\mu_*(f(D))}{|\det A|} \leq \frac{\mu^*(f(D))}{|\det A|} \leq \mu^*(D).$$

D が面積をもつから $\mu_*(D) = \mu^*(D) = \mu(D)$ であり，したがって

$$\mu_*(f(D)) = \mu^*(f(D)) = |\det A|\mu(D).$$

これより $f(D)$ は面積をもち (1.1) が成り立つ．

最後に A が一般の正則行列とする．このとき A はいくつかの基本行列 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ により $A = A_k A_{k-1} \cdots A_2 A_1$ とあらわされ，A_i により決まる線形写像を f_i とすると $f = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ となる．たとえば $k = 2$ とすると D が面積を持てば $f_1(D)$ も面積をもち，$f(D) = f_2(f_1(D))$ も面積をもつ．そして

$$\mu(f(D)) = |\det A_2|\mu(f_1(D)) = |\det A_2||\det A_1|\mu(D) = |\det(A_2A_1)|\mu(D) = |\det A|\mu(D),$$

すなわち (1.1) がなりたつ．$k \leq 3$ の場合も同様である．

補題 1 R^2 の開集合 Ω から R^2 への C^1 級の写像 g が Ω において１対１で，

$$\det g'(z) \neq 0, z = (x, y) \in \Omega$$

であるとする．このとき D が Ω に含まれる面積をもつ有界閉集合ならば $g(D)$ は面積をもち

$$\mu(g(D)) \leq \iint_D |\det g'(z)|\, dxdy.$$

証明　まず D が矩形 K である場合を考える．条件と逆写像定理により K の内部，外部，境界はそれぞれ $g(K)$ の内部，外部，境界に写る．とくに $g(K)$ の境界は，K の四辺を g により写したなめらかな４曲線であり，その面積は 0 である．ゆえに $g(K)$ は面積をもつ．

原点を中心とし対角線の長さが d である矩形 H をとる．各点 $a \in R^2$ に対して $a + H = \{a + h : h \in H\}$ は a を中心とする矩形である．$a + H \subset K$ であるとし $g(a + H)$ の面積を考える．$A = g'(a)$ とおき，写像 g を $g(z) = A(A^{-1}g(z))$ とあらわすと

$$\mu(g(a + H)) = |\det A|\mu(A^{-1}g(a + H)).$$

ところで有限増分の定理により，ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて

$$\begin{aligned} |A^{-1}g(a + h) - A^{-1}(g(a) + g'(a)h)| &\leq |A^{-1}(g'(a + \theta h) - g'(a))h| \\ &\leq |g'(a)^{-1}g'(a + \theta h) - I| \times |h|. \end{aligned}$$

$F(w, z) = g'(w)^{-1}g'(z)$ とおく．この行列関数はコムパクト集合 K において一様連続で，$F(z, z) = I$ である．従って任意の正数 ϵ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し

$$|w - z| \leq \delta, w, z \in K \Rightarrow |g'(w)^{-1}g'(z) - I| \leq \epsilon.$$

ゆえに $d/2 < \delta$ ならば $|g'(a)^{-1}g'(a + \theta h) - I| \times |h| < \epsilon d/2$ がなりたつ．したがって点 $A^{-1}g(a + h)$ は矩形 $A^{-1}(g(a) + g'(a)H) = A^{-1}g(a) + H$ から $\epsilon d/2$ 以内の距離にある．これより H の縦横の長さを α, β とおくと，$\alpha, \beta \leq d$ であるから

$$\begin{aligned} \mu(A^{-1}g(a + H)) &\leq (\alpha + \epsilon d)(\beta + \epsilon d) = \alpha\beta + \epsilon d(\alpha + \beta) + \epsilon^2 d^2 \\ &\leq \mu(H) + d^2(2\epsilon + \epsilon^2). \end{aligned}$$

結局 $d < 2\delta$ ならば

$$\mu(g(a+H)) \le |\det g'(a)|(\mu(H) + d^2(2\epsilon + \epsilon^2)).$$

K の各辺を n 等分する分割によりできる小矩形を K_{ij} とおき，その中心を z_{ij} とする．K の対角線の長さを L とおくと K_{ij} の対角線の長さは L/n となる．ゆえに $n > L/2\delta$ ならば

$$\mu(g(K_{ij})) \le |\det g'(z_{ij})|(\mu(K_{ij}) + (L/n)^2(2\epsilon + \epsilon^2)).$$

$M = \sup\{|\det g'(z)| : z \in K\}$ とおくと

$$\mu(g(K)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu(g(K_{ij})) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\det g'(z_{ij})|\mu(K_{ij}) + n^2M(L/n)^2(2\epsilon + \epsilon^2).$$

$n \to \infty$ のとき右辺の第１項は $|\det g'(z)|$ の K 上の積分に収束する．したがって

$$\mu(g(K)) \le \iint_K |\det g'(z)|\ dxdy + ML^2(2\epsilon + \epsilon^2).$$

$\epsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるから，補題の不等式が $D = K$ の場合にはなりたつ．

つぎに D が補題の条件をみたす集合とする．D と Ω の補集合との距離を b とすると，$b > 0$. D を含む矩形をとり，それを $b/2$ 以下の mesh で分割する．できる小矩形のうち D と交わるもの全体の和集合を G とおく．G の点はすべて D から $b/2$ 以内の距離にあるから，$D \subset G \subset \Omega$. さて D は面積をもつ集合であるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して次のような矩形塊 E, F がある：

$$E \subset D \subset F, \ \ \mu(F) - \mu(E) < \epsilon.$$

$F \cap G$ を改めて F とおいてもこの性質はなりたつ．したがって $F \subset G$ と仮定してもよい．$G \subset \Omega$ であるから $|\det g'(z)|$ は G で連続で有界閉集合 G で最大値 N をとる．$F \backslash E$ は矩形の和集合であるから補題を適用できる．その結果 $\mu(g(F \backslash E)) \le N\mu(F \backslash E)$ がなりたつから，結局 $0 \le \mu(g(F)) - \mu(g(E)) \le N\epsilon$.　一方

$$\mu(g(E)) = \mu_*(g(E)) \le \mu_*(g(D)) \le \mu^*((g(D)) \le \mu^*(g(F)) = \mu(g(F))$$

であるから

$$\mu^*(g(D)) - \mu_*(g(D)) \le \mu(g(F)) - \mu(g(E)) \le N\epsilon.$$

ゆえに $g(D)$ は面積をもつ．$\mu(g(D)) - \mu(g(E)) \le \mu(g(F)) - \mu(g(E)) \le N\epsilon$ であるから

$$\begin{aligned}\mu(g(D)) \le \mu(g(E)) + N\epsilon &\le \iint_E |\det g'(z)|\ dxdy + N\epsilon \\ &\le \iint_D |\det g'(z)|\ dxdy + N\epsilon\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるから，補題の不等式が成り立つ

定理 集合 D, E は面積をもつ R^2 の有界な開集合とし，写像 $g : E \to D$ は C^1 級，１対１，上への写像で E 上いたるところ $g'(u, v)$ が正則で $\det g'(u, v)$ が有界であるとする．このとき 関数 $f(x, y)$ が D で有界，連続であれば

$$\iint_D f(x, y)\ dxdy = \iint_E f(g(u, v))|\det g'(u, v)|\ dudv.$$